

Gleichgewichtsregelung von Fahrrädern durch Lenkdrehmoment, Gleichgewichtsträgheit und Raddrehmomenten zur Mobilitätsverbesserung von in der Bewegung eingeschränkten Personen

Balance control of bicycles by steering torque, inertia balance, and wheel torques to improve mobility for paralyzed people

Prof. Dr.-Ing. Carsten Fräger
Hochschule Hannover
University of Applied Sciences and Arts
Elektrotechnik - Antriebstechnik - Mechatronik

16.05.2012

1 Übersicht

Fahrradfahren ist für viele Menschen ein wichtiger Mobilitätsfaktor. Sie können sich mit eigener Kraft in einem Umkreis von mehreren Kilometern bewegen. Im Alter wird das Fahrradfahren jedoch durch nachlassende Kraft und eingeschränkte Motorik zum Gleichgewichtthalten eingeschränkt. Erschwerend kommt hinzu, dass diese Personen aus Vorsicht in der Regel kleinere Fahrgeschwindigkeiten bevorzugen. Bei niedrigen Geschwindigkeiten nimmt aber die Gleichgewichtsstabilität des Fahrrads ab und der Fahrer muss intensiver mit dem Lenker das Gleichgewicht kontrollieren.

Moderne E-Bikes können die nachlassende körperliche Kraft kompensieren. Es bleibt aber das Problem des Gleichgewichthaltens beim Radfahren.

Im folgenden Beitrag wird die Gleichgewichtsregelung von Fahrrädern betrachtet. Dabei werden verschiedene Möglichkeiten der Gleichgewichtsregelung behandelt. Die Beurteilung der Verfahren erfolgt anhand der Stabilität und der Eigenschwingungen des geregelten Systems.

Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Stabilisierung des Bereichs geringer Fahrgeschwindigkeiten gelegt, da mit der nachlassenden Motorik oft auch eher geringere Fahrgeschwindigkeiten gewählt werden.

2 Abstract

Cycling is for many people is an important factor of mobility. You can move under your own power within a radius of several kilometers. At age to ride a bike is limited by declining strength and limited motor skills for maintaining balance. To make matters worse, these people generally prefer smaller speeds of caution.

At low speeds the stability of bikes decreases. Therefore the driver has to make the balance control by moving the handlebars.

Bei niedrigen Geschwindigkeiten nimmt aber die Gleichgewichtsstabilität des Fahrrads ab und der Fahrer muss intensiver mit dem Lenker das Gleichgewicht kontrollieren.

Modern e-bikes can compensate the declining physical strength. But the problem balance while cycling is keeping .

In the following paper, the balance control of cycles is considered. Various possibilities for the balance control are considered. The assessment of the method is based on the stability and the natural oscillations of the controlled system.

Particular attention is paid to the stabilization of the area low speeds because of the diminishing motor skills often rather slower speeds are selected.

Inhaltsverzeichnis

1 Übersicht	1
2 Abstract	2
3 Einleitung	3
4 Aufbau und geometrische Größen	5
5 Bewegungsgleichungen des Fahrrads	6
5.1 Bewegungsgleichungen des Fahrrads ohne Gleichgewichtsregelung	6
5.2 Bewegungsgleichungen mit Gleichgewichtsregelung durch Lenkdrehmoment, Raddrehmomente und Gleichgewichtsträgheit	8
6 Eigenwerte des unregulierten Fahrrads	12
7 Eigenwerte mit Gleichgewichtsregelung	14
7.1 Gleichgewichtsregelung mit Lenkerdrehmoment	15
7.2 Gleichgewichtsregelung mit Hinterraddrehmoment	16
7.3 Gleichgewichtsregelung mit Vorderraddrehmoment	19
7.4 Gleichgewichtsregelung mit Drehmoment Gleichgewichtsträgheit	20
8 Zusammenfassung	21

3 Einleitung

Durch körperliche Einschränkungen sind viele Personen in Ihrer Mobilität eingeschränkt. Vielfach fehlt ihnen die Kraft, sich selbständig auf den eigenen Beinen zu Fuß zu bewegen. Unter Umständen fehlt auch einfach die Ausdauer, um angemessene Strecken mit eigener Kraft zu bewältigen.

Fahrräder bieten hier die Möglichkeit, den Körper von der Tragfunktion zu entlasten. Oft ist jedoch die Kraft in den Beinen und die Ausdauer soweit eingeschränkt, dass Fahrradfahren ohne Hilfe nur über kurze Distanzen möglich ist. Zur Kompensation kommen E-Bikes in Frage. Es handelt sich um Fahrräder mit Fahrentrieben in Form von Akku gespeisten Elektromotoren.

Kommen Einschränkungen der Motorik z.B. durch verlängerte Reaktionszeiten, eingeschränkte Muskelsteuerung, Tremor (Zittern) oder Gleichgewichtsstörungen hinzu, ist heute nur mit Dreirädern eine selbständige Mobilität möglich.

Im Folgenden wird die Möglichkeit behandelt, auch Fahrräder mit zwei Rädern für diesen Personenkreis nutzbar zu machen. Die körperliche Unterstützung erfolgt durch einen Akku gespeisten Elektroantrieb.

Die Unterstützung für das Gleichgewicht erfolgt durch eine Gleichgewichtsregelung. Die Gleichgewichtsregelung erfolgt zum Einen durch die Lenkung. Zum Zweiten werden die Antriebsdrehmomente des Vorderrads und des Hinterrads zur Gleichgewichtsregelung benutzt. Als dritte Eingriffsmöglichkeit wird die Wirkung einer Massenträgheit zur Gleichgewichtsregelung untersucht.

In den folgenden Abschnitten wird an einem konkreten Beispiel gezeigt, durch welche Möglichkeiten eine Gleichgewichtsregelung realisiert werden kann. Dabei geht es in diesem Beitrag darum, die prinzipiellen Möglichkeiten aufzuzeigen. Eine konkrete Realisierung der Regelung wird hier noch nicht dargestellt. Es wird die Stabilität der Regelung anhand der Eigenwerte des Gleichungssystems zur Beschreibung der Eigenbewegungen betrachtet.

Mit der Gleichgewichtsregelung soll das geregelte Elektrofahrrad eine Verbesserung der Lebenssituation von Personen mit eingeschränkter Mobilität ermöglichen. Dabei ist es Ziel der Gleichgewichtsregelung, den Geschwindigkeitsbereich mit stabilem Gleichgewichtsverhalten zu kleinen Geschwindigkeiten hin auszuweiten.

In der aktuellen Literatur wird die Gleichgewichtsregelung unter verschiedenen Aspekten behandelt. Eine allgemeine Darstellung der Gleichgewichtsproblematik beim Fahrradfahren erfolgt in [7]. Es wird speziell das Kurvenfahren und die Einleitung der Kurvenfahrt behandelt. Die Darstellung erfolgt für das stationäre Verhalten ohne Differenzialgleichungen zur Beschreibung der Bewegung.

Nachdem in früheren Veröffentlichungen die Kreiselkräfte auf das Vorderrad für eine stabile Fahrt des Fahrrads verantwortlich gemacht wurden, ist in [8] experimentell nachgewiesen, dass das Gleichgewicht beim Fahren im wesentlichen durch den Nachlauf des Vorderrads entsteht. Die Kreiselkräfte unterstützen zwar das Gleichgewichtsverhalten, sind aber gegenüber den Kräften durch den Nachlauf vernachlässigbar.

Die Differenzialgleichungen für die Bewegung eines Fahrrads mit Berücksichtigung der Kreiselkräfte und der Kräfte durch den Nachlauf werden in [2] dargestellt. Die Gleichungen sind dabei für kleine Lenkwinkel linearisiert. Als Störgröße wird das Lenkmoment des Fahrers berücksichtigt. Die Gleichgewichtsregelung erfolgt über das Lenkdrehmoment. Für einen Lenkvorgang wird die Trajektorie behandelt.

In [3] erfolgt die Gleichgewichtsregelung über den Antrieb des Hinterrads und den Lenker. Die Differenzialgleichungen für die Bewegung des Fahrrads werden mit Vereinfachungen angegeben. So wird z.B. der Nachlauf des gelenkten Rads nicht berücksichtigt. Die Gesamtmasse von Fahrrad und Fahrer wird als Punktmasse betrachtet.

Die Trajektorie für den Lenkvorgang mit einer Gleichgewichtsregelung wird in [4] und [6] behandelt.

Das dynamische Modell von Motorrädern wird in [5] betrachtet. Dabei wird besonderes Augenmerk auf ein Modell für den Kontakt zwischen Reifen und Straße gelegt. Es werden sowohl die Elastizität des Reifens als auch Schlupf gegenüber der Straße betrachtet.

Eine Gegenüberstellung verschiedener Gleichungssystem zur Beschreibung des Gleichgewichtsverhaltens von Zweirädern findet sich in [9]. Die Massen von Fahrer und Fahrrad werden durchweg als starr gekoppelte Punktmassen betrachtet. Vielfach sind die Gleichungen um einen Arbeitspunkt linearisiert.

Im vorliegenden Beitrag wird aufbauend auf den Gleichungen in [2] eine Stabilitätsbetrachtung des Fahrrads gemacht. Da das Ziel die Verbesserung der Mobilität eingeschränkter Personen ist, wird besonders der Bereich kleiner Geschwindigkeiten betrachtet.

Für diesen Personenkreis ist eine Unterstützung durch einen Fahantrieb auf jeden Fall erforderlich, so dass speziell die Gleichgewichtsregelung durch den Fahantrieb betrachtet wird. Dazu werden die Gleichungen aus [2] um die Antriebsmomente erweitert. Die Stabilitätsbetrachtung erfolgt im Zustandsraum anhand der Eigenwerte des geregelten Systems.



Abbildung 1: Beispiel für E-Bike mit tiefem Einstieg. Hinterradantrieb (Quelle: Fa. Hutt / Epple)

4 Aufbau und geometrische Größen

Das Bild 1 zeigt ein Beispiel für ein aktuelles E-Bike mit extra tiefem Einstieg. Das Fahrrad hat einen Hinterradantrieb. Der Elektromotor treibt über die Kette das Hinterrad an.

Alternativ gibt es auch E-Bikes mit direktem Antrieb des Hinterrads über einen langsam laufenden Elektromotor oder über einen Getriebemotor, der in die Hinterradnabe integriert ist.

Der Akku befindet sich meistens wie in Bild 1 hinter dem Sattelrohr. Alternativ kann der Akku im Bereich des Gepäckträgers montiert sein.

Alternativ kann der Elektroantrieb auch am Vorderrad erfolgen. In diesem Fall wird ein Elektromotor ggf. mit Getriebe in die Nabe des Vorderrads eingebaut.

Zur Gleichgewichtsregelung dient im Normalfall die Lenkbewegung. Für eine automatische Gleichgewichtsregelung ist dazu am Lenker ein Antrieb erforderlich, der das Lenkdrehmoment M_L aufbringt.

Zur Gleichgewichtsregelung können sowohl der Hinterradantrieb als auch der Vorderradantrieb eingesetzt werden. Dazu müssen die Drehmomente M_H für das Hinterrad und M_V für das Vorderrad aufgebracht werden.

In diesem Beitrag wird außerdem die Gleichgewichtsregelung über eine zusätzliche Massenträgheit untersucht. Dazu eine Massenträgheit J_T mit einem Motor mit dem Drehmoment M_T angetrieben, deren Drehachse in Fahrtrichtung des Fahrrads liegt.

Damit stehen insgesamt 4 Drehmomente zur Gleichgewichtsregelung zur Verfügung.

Das Gleichgewichtsverhalten wird durch den geometrischen Aufbau des Fahrrades vorgegeben. Bild 2 gibt die relevanten Größen wieder.

Die Gesamtmasse m aus Fahrrad und Fahrer hat den Schwerpunkt mit der Höhe h über der Fahrbahn und dem Abstand b vor dem Hinterrad. Der Radstand L ist durch den Abstand der Kontaktpunkte der Reifen zur Fahrbahn gegeben. Das Vorderrad wird mit dem Lenkwinkel σ gelenkt. Dabei hat das Vorderrad den Nachlauf l .

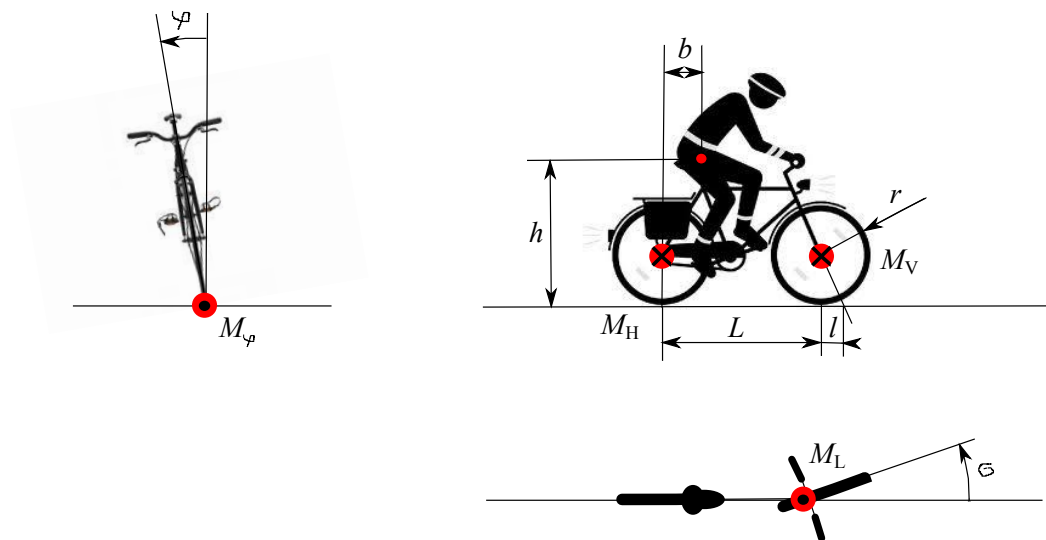


Abbildung 2: Geometrische Größen und Drehmomente am Fahrrad

Die Räder sind durch den Radius r und die Massenträgheit J_r gekennzeichnet. Zur Vereinfachung werden r und J_r für Vorder- und Hinterrad gleich angenommen.

Bei der Beschreibung des dynamischen Verhalten sind noch die Massenträgheiten um die Drehachsen relevant. Dies ist zum Einen die Massenträgheit J_L von Lenker und Vorderrad um die Lenkachse.

Zum zweiten ist die Massenträgheit $J_{\phi L}$ des Lenkers und des Vorderrads um die Kontaktlinie der Reifen auf der Fahrbahn von Bedeutung. Die Massenträgheit J_ϕ beschreibt die Trägheit des restlichen Teils des Fahrrads und des Fahrers um die Kontaktlinie der Reifen auf der Fahrbahn.

Tabelle 1 gibt die Zahlenwerte für das hier betrachtete Beispielfahrrad wieder.

5 Bewegungsgleichungen des Fahrrads

5.1 Bewegungsgleichungen des Fahrrads ohne Gleichgewichtsregelung

Die Bewegungsgleichungen des Fahrrads ohne Gleichgewichtsregelung sind in verschiedenen Veröffentlichungen beschrieben, u.a. [1, 2, 3, 4].

Hier werden die Gleichungen aus [2] herangezogen. Dabei werden folgende Vereinfachungen gemacht:

- Die Gleichungen sind für kleine Lenkwinkel σ angegeben. Dadurch treten keine Winkelfunktionen in den Gleichungen auf.
- Die Masse des Fahrrads und des Fahrers werden als starr gekoppelt betrachtet und durch eine einzige Punktmasse m repräsentiert.
- Bis auf die Lenkreibung werden keine Reibmomente oder Reibkräfte berücksichtigt.

Eine zentrale Gleichung beschreibt die Linearbewegung des Fahrrads mit der Geschwindigkeit v . Die Drehmomente des Vorderrads und des Hinterrads M_V und des Hinterrads M_H beschleunigen die resultierende Massenträgheit aus den Massenträgheiten J_r der beiden Räder und der Gesamtmasse m von Fahrrad und Fahrer. Die Bewegungsgleichung der linearen Bewegung lautet:

$$\left(\frac{2 \cdot J + m \cdot r^2}{r} \right) \cdot \dot{v} = M_H + M_V \quad (1)$$

Die Seitenneigung des Fahrrads um die Kontaktlinie auf der Fahrbahn ist die zweite zentrale Bewegung des Fahrrads. Die Bewegungsgröße sind der Neigungswinkel φ bzw. die Neigungswinkelgeschwindigkeit $\dot{\omega}_\varphi$. In [2], Gl. (2) ist das Drehmoment auf den gelenkten Teil des Fahrrads aus Vorderrad und Lenker beschrieben. [2], Gl. (3) beschreibt das Drehmoment des hinteren Fahrradteils und des Fahrers. Die Neigung des Fahrrads entsteht aus dem Zusammenwirken der Gewichtskraft $m \cdot g$ sowie der Fliehkraft bei Kurvenfahrt des Fahrrads. Daher finden sich in der resultierenden Bewegungsgleichung auch der Lenkwinkel σ bzw. die Lenkwinkelgeschwindigkeit $\dot{\omega}_\sigma$ sowie die Fahrgeschwindigkeit v . In den folgenden Gleichungen wird außer den in [2] berücksichtigten Drehmomenten zusätzlich ein extern wirkendes Drehmoment M_φ berücksichtigt.

$$(J_\varphi + J_{\varphi L}) \cdot \dot{\omega}_\varphi = \frac{J_r}{r} \cdot v \cdot \omega_\sigma + \frac{J_r}{r \cdot L} \cdot v^2 \cdot \sigma + \frac{h \cdot m}{L} \cdot v^2 \cdot \sigma + h \cdot m \cdot g \cdot \varphi + \frac{h \cdot b \cdot m}{L} \cdot v \cdot \omega_\sigma + M_n + M_\varphi \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi \quad (3)$$

Das Drehmoment M_n setzt sich zum einen aus dem Drehmoment des Vorderrads und zum anderen aus der Beschleunigung der Gleichgewichtsmassenträgheit zusammen:

$$M_n = -M_V \cdot \sigma + J_T \cdot \alpha_T \quad (4)$$

Bei stationärer Kurvenfahrt ergibt sich aus der Gleichung für die Seiteneigung der Zusammenhang zwischen Lenkwinkel σ und Seitenneigung φ . Bei stationärer Fahrt verschwinden alle Ableitungen, d.h. $\dot{\omega}_\varphi = 0$, $\omega_\sigma = 0$, $\alpha_T = 0$ und $M_n = 0$.

Daraus ergibt sich die stationäre Gleichung

$$0 = + \frac{J_r}{r \cdot L} \cdot v^2 \cdot \sigma + \frac{h \cdot m}{L} \cdot v^2 \cdot \sigma + h \cdot m \cdot g \cdot \varphi \quad (5)$$

$$\left(\frac{J_r}{r \cdot L} + \frac{h \cdot m}{L} \right) \cdot v_0^2 \cdot \sigma_0 = -h \cdot m \cdot g \cdot \varphi_0 \quad (6)$$

Im Gegensatz zu [2] ist hier die Fahrgeschwindigkeit v nicht konstant sondern selber eine zeitveränderliche Größe. Daher ist zur Beschreibung der Bewegungsgleichungen eine Linearisierung um den Arbeitspunkt aus Geschwindigkeit v_0 und Lenkwinkel σ_0 sowie Drehmoment M_{V0} zweckmäßig. Wegen der vernachlässigten Reibung ist das stationäre Drehmoment $M_{V0} = 0$, so dass alle Terme mit M_{V0} verschwinden. Die Linearisierung führt auf folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} (J_\varphi + J_{\varphi L}) \cdot \dot{\omega}_\varphi &= \left(\frac{J_r}{r} + \frac{h \cdot b \cdot m}{L} \right) \cdot v_0 \cdot \omega_\sigma \\ &+ \left(\frac{J_r}{r \cdot L} + \frac{h \cdot m}{L} \right) \cdot v_0^2 \cdot \sigma \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{J_r}{r \cdot L} + \frac{h \cdot m}{L} \right) \cdot \sigma_0 \cdot v_0 \cdot v \\ &+ h \cdot m \cdot g \cdot \varphi - \sigma_0 \cdot M_V + J_T \cdot \alpha_T + M_\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Die Bewegung des Fahrrads führt zu Drehmomenten auf den Lenker. Diese Drehmomente wirken über die Lenkbewegung zurück auf die Bewegung des Fahrrads. In [2] ist in Gl. (1) die Bewegung des Lenkers in Abhängigkeit von der Fahrradbewegung und eines externen Drehmomentes angegeben. Das externe Drehmoment M_L wird durch die Gleichgewichtsregelung vorgegeben. Hier werden noch zusätzlich das Drehmoment $-\frac{\sigma_0 \cdot l}{r} \cdot M_H$ auf die Lenkung durch das Hinterraddrehmoment sowie das Reibmoment $d_{ae} \cdot \omega_\sigma$ der Lenkung berücksichtigt.

$$J_L \cdot \dot{\omega}_{\text{sigma}} = -\frac{v_0}{r} \cdot J_r \cdot \omega_\varphi - \frac{m \cdot g \cdot b \cdot l}{L^2} \cdot \varphi - \frac{m \cdot b \cdot l}{L^2} \cdot v_0^2 \cdot \sigma - 2 \cdot \frac{m \cdot b \cdot l}{L^2} \cdot v_0 \cdot \sigma_0 \cdot v - d_{ae} \cdot \omega_\sigma - \frac{\sigma_0 \cdot l}{r} \cdot M_H + M_L \quad (8)$$

$$\dot{\sigma} = \omega_\sigma \quad (9)$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen zur Beschreibung der Eigenbewegungen des Fahrrads komplett. Sie gelten für kleine Lenkwinkel σ . Zur Vereinfachung wird ein steifer Aufbau des Fahrrads unterstellt. Fahrradmasse und Masse des Fahrers werden zu einer Punktmasse zusammengefasst, die starr mit dem Fahrrad gekoppelt ist.

5.2 Bewegungsgleichungen mit Gleichgewichtsregelung durch Lenkdrehmoment, Raddrehmomente und Gleichgewichtsträgheit

Die Gleichgewichtsregelung soll hier durch 4 Mechanismen arbeiten:

- Lenkdrehmoment M_L
- Vorderraddrehmoment M_V
- Hinterraddrehmoment M_H
- Drehmoment der Gleichgewichtsträgheit M_T

Die Steuerung der Drehmomente erfolgt durch die Neigungswinkelgeschwindigkeit ω_φ bzw. deren Ableitungen. Dabei wird hier nur die Abweichung vom stationären Betriebspunkt betrachtet. Der Sollwert der Neigungswinkelgeschwindigkeit ist daher gleich Null. Die Regelabweichung ist die Neigungswinkelgeschwindigkeit selber.

Für die Regelung müssen die Neigungswinkelgeschwindigkeit ω_φ und deren Ableitungen α_φ bzw. $\dot{\alpha}_\varphi$ gemessen werden. Die Messung erfolgt in der Regel mit einer Zeitverzögerung. Dies wird hier durch eine Verzögerung mit PT1-Systemen nachgebildet. Am Ausgang der PT1-Systeme stehen dann die Größen ω_R , α_R und $\dot{\alpha}_R$ für den Regler zur Verfügung. Die Differenzialgleichungen für die PT1-Systeme mit der Zeitkonstanten T_R lauten:

$$T_R \cdot \dot{\omega}_R = \omega_\varphi - \omega_R \quad (10)$$

$$T_R \cdot \dot{\alpha}_R = \dot{\omega}_\varphi - \alpha_R \quad (11)$$

Mit den entsprechenden Verstärkungsfaktoren werden aus den Größen ω_R , α_R und $\dot{\alpha}_R$ die Drehmomente gebildet:

$$M_H = K_{IH} \cdot \omega_R + K_{PH} \cdot \alpha_R + K_{DH} \cdot \dot{\alpha}_R \quad (12)$$

$$M_V = K_{IV} \cdot \omega_R + K_{PV} \cdot \alpha_R + K_{DV} \cdot \dot{\alpha}_R \quad (13)$$

$$M_L = K_{IL} \cdot \omega_R + K_{PL} \cdot \alpha_R + K_{DL} \cdot \dot{\alpha}_R \quad (14)$$

Für die Gleichgewichtsträgheit wird angenommen, dass die Bewegung der Gleichgewichtsträgheit nur bis zu einer oberen Grenzfrequenz f_o mit voller Größe erfolgen kann. Weiter wird vorgesehen, dass es für die Gleichgewichtsträgheit eine untere Grenzfrequenz f_u gibt, so dass die mittlere Drehzahl der Gleichgewichtsmasse gleich Null ist. Dadurch wird sichergestellt, dass bei stationärer Fahrt die Winkelgeschwindigkeit ω_T und damit der Drehimpuls $J_T \cdot \omega_T$ verschwinden. Negative Einflüsse auf das Lenkverhalten des Fahrrads werden dadurch minimiert. Dies führt auf folgende Differenzialgleichung für die Bewegung der Gleichgewichtsträgheit:

$$\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_o \cdot f_u} \cdot \dot{\alpha}_T - K_{DT} \cdot \dot{\alpha}_R = - \left(\frac{1}{2 \cdot \pi f_o} + \frac{1}{2 \cdot \pi f_u} \right) \cdot J_T \cdot \alpha_T - J_T \cdot \omega_T + K_{IT} \cdot \omega_R + K_{PT} \cdot \alpha_R \quad (15)$$

$$\dot{\omega}_T = \alpha_T \quad (16)$$

Die Drehmomente M_H und M_V lassen sich in die Gleichung für die Linearbewegung einsetzen. Dies führt auf folgende Differenzialgleichung für die Linearbewegung:

$$\left(\frac{2 \cdot J + m \cdot r^2}{r} \right) \cdot \dot{v} - (K_{DH} + K_{DV}) \cdot \dot{\alpha}_R = (K_{IH} + K_{IV}) \cdot \omega_R + (K_{PH} + K_{PV}) \cdot \alpha_R \quad (17)$$

Ebenso werden die Drehmomente in der Gleichung für die Seitenneigung ersetzt. So ergibt sich die resultierende Differenzialgleichung für die Seitenneigung:

$$\begin{aligned} (J_\varphi + J_{\varphi L}) \cdot \dot{\omega}_\varphi + \sigma_0 \cdot K_{DV} \cdot \dot{\alpha}_R &= \left(\frac{J_r}{r} + \frac{h \cdot b \cdot m}{L} \right) \cdot v_0 \cdot \omega_\sigma \\ &+ \left(\frac{J_r}{r \cdot L} + \frac{h \cdot m}{L} \right) \cdot v_0^2 \cdot \sigma + 2 \cdot \left(\frac{J_r}{r \cdot L} + \frac{h \cdot m}{L} \right) \cdot \sigma_0 \cdot v_0 \cdot v \\ &+ h \cdot m \cdot g \cdot \varphi - \sigma_0 K_{IV} \cdot \omega_R - \sigma_0 K_{PV} \cdot \alpha_R \\ &+ J_T \cdot \alpha_T + M_\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

Die Differenzialgleichung der Lenkbewegung ergibt sich ebenfalls durch Einsetzen der Drehmomente:

$$\begin{aligned} J_L \cdot \dot{\omega}_{\text{sigma}} + \left(\frac{\sigma_0 \cdot l}{r} \cdot K_{DH} - K_{DL} \right) \cdot \dot{\alpha}_R &= - \frac{v_0}{r} \cdot J_r \cdot \omega_\varphi - \frac{m \cdot g \cdot b \cdot l}{L^2} \cdot \varphi - \frac{m \cdot b \cdot l}{L^2} \cdot v_0^2 \cdot \sigma \\ &- 2 \cdot \frac{m \cdot b \cdot l}{L^2} \cdot v_0 \cdot \sigma_0 \cdot v - d_{ae} \cdot \omega_\sigma \\ &+ \left(K_{DL} - \frac{\sigma_0 \cdot l}{r} \cdot K_{DH} \right) \\ &+ \left(K_{PL} - \frac{\sigma_0 \cdot l}{r} \cdot K_{PH} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

In den vorstehenden Gleichungen sind nun die Zustandsgrößen v , σ , ω_σ , φ , ω_φ , φ_R , ω_R , α_R , ω_T sowie α_T enthalten. Alle Gleichungen sind Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Daher lassen sich die Differenzialgleichungen sinnvoll in Matrizenform schreiben:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (20)$$

Hierin ist der Zustandsvektor \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ \sigma \\ \omega_\sigma \\ \varphi \\ \omega_\varphi \\ \omega_R \\ \alpha_R \\ \omega_T \\ \alpha_T \end{bmatrix} \quad (21)$$

Der Eingangsvektor \mathbf{u} enthält nur das Drehmoment M_φ um die Kontaktlinie auf der Fahrbahn. Dieses Drehmoment resultiert z.B. aus den Bewegungen des Fahrers. In Matrizenschreibweise ergibt sich:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_\varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot M_\varphi \quad (22)$$

Der Ausgangsvektor \mathbf{y} enthält die Fahrgeschwindigkeit v , den Lenkwinkel σ und den Neigungswinkel φ :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} v \\ \sigma \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \quad (23)$$

Die Matrizen \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_1 ergeben sich aus den Koeffizienten der Gleichungen (10), (18), (15), (17), (19), (9), (3), (52) und (11):

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\left(\frac{J}{rL} + \frac{hmg}{L}\right)v_0\sigma_0 & \left(\frac{J}{rL} + \frac{hmg}{L}\right)v_0^2 & \left(\frac{J}{r} + \frac{hbm}{L}\right)v_0 & hmg & 0 & -\sigma_0 K_{IV} & -\sigma_0 K_{PV} & 0 & J_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{IT} & K_{PT} & -J_T & \frac{J_T}{2\pi} \left(\frac{1}{f_u} + \frac{1}{f_o}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{IH} + K_{IV} & K_{PH} + K_{PV} & 0 & 0 \\ -\frac{2mbv_0\sigma_0}{L^2} & -\frac{2mbv_0^2}{L^2} & -d_{ac} & -\frac{2mgbl}{L} & -\frac{v_0 J_T}{r} & K_{IL} - \frac{\sigma_0 l}{r} K_{IH} & K_{PL} - \frac{\sigma_0 l}{r} K_{PH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_\varphi + J_{\varphi w} & 0 & \sigma_0 K_{DV} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{DT} & 0 & \frac{J_T}{4\pi^2 f_u f_o} \\ \frac{2J_r + mr^2}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{DH} - K_{DV} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0 l}{r} K_{DH} - K_{DF} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & T_r & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Die Matrizen **B** und **C** ergeben sich aus den obigen Gleichungen zu

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Da das Drehmoment M_φ nicht direkt auf die Winkel wirkt, ist die Durchgangsmatrix **D** gleich Null:

$$\mathbf{D} = [0] \quad (28)$$

Zur Untersuchung der Stabilität und der Eigenwerte des Systems sind nur die Matrizen **A**₀ und **A**₁ erforderlich. Der Vektor der Eigenwerte $[\lambda_i]$ ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$[\lambda_i] = \text{eig}(\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_0) \quad (29)$$

als nichttriviale Lösungen der Gleichung

$$\det(\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_0 - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (30)$$

Darin ist **E** die Einheitsmatrix.

Neben der Stabilität und der Eigenwerte ist die Übertragungsfunktion des Systems kennzeichnend für das Verhalten des Fahrrads. Die Übertragungsfunktion ist das Verhältnis der Ausgangsgrößen **y** zur Eingangsgröße M_φ . Da hier die Ausgangsgrößen einen Vektor darstellen, ist auch die Übertragungsfunktion ein Vektor:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{y}}{M_\varphi} \quad \text{mit } s = j \cdot \omega = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \quad (31)$$

Mit den Matrizen der Zustandsraumdarstellung lässt sich die Übertragungsfunktion nach folgender Gleichung errechnen:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (32)$$

Hierin ist **E** die Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = [1] \quad (33)$$

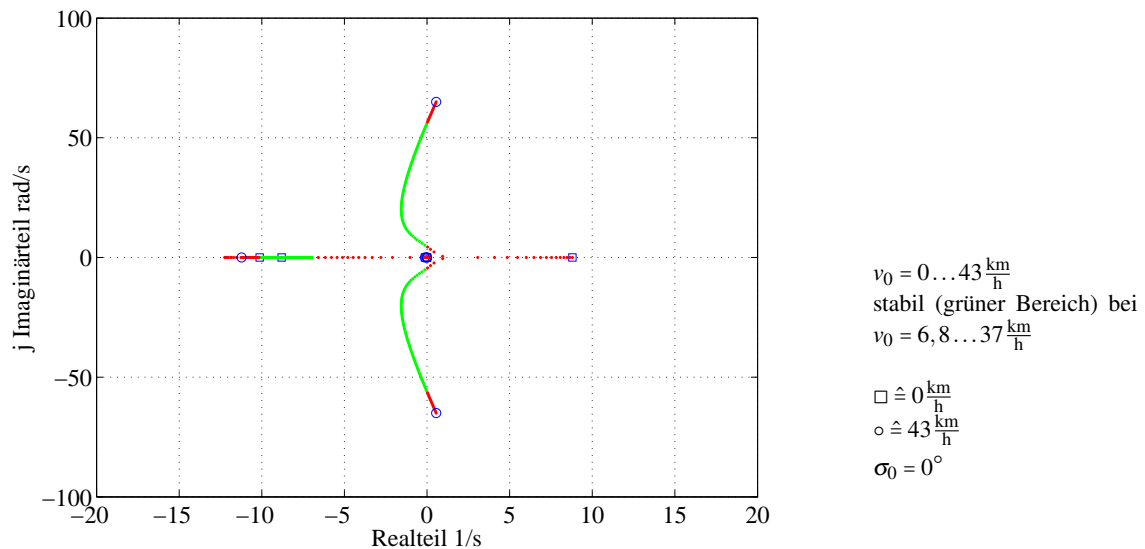


Abbildung 3: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad ohne Regelung, Geradeausfahrt

und \mathbf{A} berechnet sich nach folgender Beziehung:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_0 \quad (34)$$

Damit ergibt sich schließlich die Übertragungsfunktion zu

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (35)$$

Damit stehen die Gleichungen zur Berechnung des Stabilitätsverhaltens und der Eigenwerte sowie der Übertragungsfunktion für das Fahrrad mit Gleichgewichtsregelung zur Verfügung.

6 Eigenwerte des ungeregelten Fahrrads

Im ersten Schritt wird das Gleichgewichtsverhalten des Fahrrades ohne zusätzliche Regelung untersucht. Dies bedeutet, dass die Reglerkoeffizienten K_{xy} alle gleich Null sind:

$$K_{xy} = 0 \text{ für alle } K_{xy} \quad (36)$$

Das dynamische Verhalten des Fahrrads wird nun nur durch die Geometrie des Fahrrads, die Reibung der Lenkung, die als Punktmasse angenommene Gesamtmasse aus Fahrrad und Fahrer und die Trägheitsmomente bestimmt. Der stationäre Fahrzustand wird durch die Geschwindigkeit v_0 , den Lenkwinkel σ_0 und den Neigungswinkel φ_0 gekennzeichnet.

Ohne Reibung in der Lenkung hätte das System keine Dämpfung und die Rechnung würde keinen stabilen Betrieb ergeben, d.h. es würden immer Eigenwerte mit positivem Realteil berechnet.

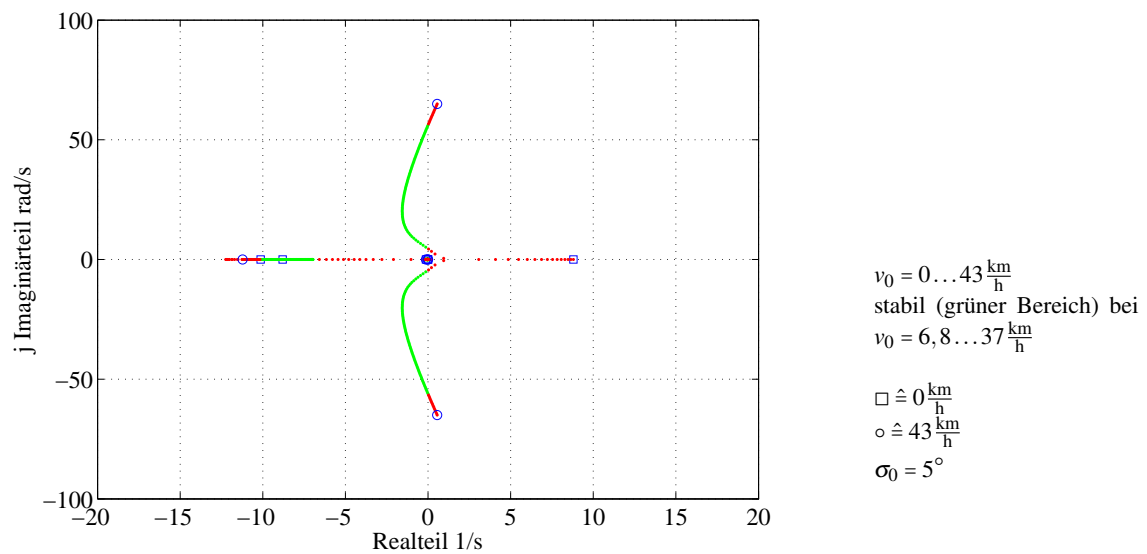


Abbildung 4: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad ohne Regelung, Kurvenfahrt mit einem Lenkwinkel $\sigma_0 = 5^\circ$

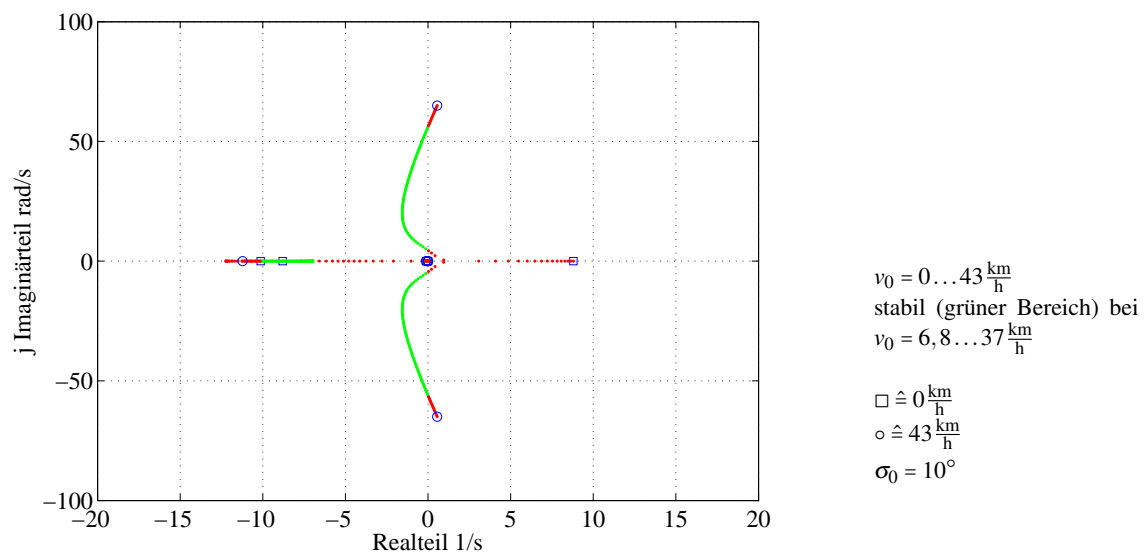


Abbildung 5: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad ohne Regelung, Kurvenfahrt mit einem Lenkwinkel $\sigma_0 = 10^\circ$

Reale Fahrräder fahren aber in einem Geschwindigkeitsbereich ab etwa Schrittgeschwindigkeit bis zu mehr als $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ stabil. In diesem Geschwindigkeitsbereich bleibt das Fahrrad ohne äußere Eingriffe im Gleichgewicht. Seitenneigungen führen aufgrund des Nachlaufs des Vorderrads zu Lenkwinkeln, die der Seitenneigung des Fahrrads entgegenwirken und so das Gleichgewicht wieder herstellen.

Zur Beurteilung der Stabilität werden die Eigenwerte der Systemmatrix bestimmt. Die Eigenwerte werden in der Komplexen Ebene für den Geschwindigkeitsbereich $v_0 = 0 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ dargestellt. Grenzstabiles Verhalten liegt vor, wenn kein Eigenwert einen positiven Realteil hat. Das bedeutet, dass das Fahrrad nicht weiter kippt bzw. dass Schwingungen nicht weiter aufklingen.

Bild 3 zeigt die Wurzelortskurve für Geradeausfahrt. Die grenzstabilen Punkte sind grün gekennzeichnet. Über einen weiten Geschwindigkeitsbereich von etwa $v_0 = 7 \dots 37 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt das Fahrrad stabil (grüner Teil der Kurve in Bild 3).

Bei kleinen Geschwindigkeiten unter $v_0 = 7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist jedoch ohne Eingriff keine Fahrt mit Gleichgewicht möglich. Die Gleichgewichtsregelung muss also gerade diesen Bereich kleiner Geschwindigkeiten stabilisieren.

Bei Kurvenfahrt ändert sich der Stabilitätsbereich praktisch nicht. Die Bilder 4 und 5 zeigen die Kurvenfahrt bei einem Lenkwinkel von $\sigma_0 = 5^\circ$ bzw. $\sigma_0 = 10^\circ$. Die Kurven sind praktisch identisch zur Geradeausfahrt.

7 Eigenwerte mit Gleichgewichtsregelung

In den folgenden Abschnitten wird das Stabilitätsverhalten mit Gleichgewichtsregelung durch die Stellgrößen

- ▶ Lenkerdrehmoment M_L
- ▶ Hinterraddrehmoment M_H
- ▶ Vorderraddrehmoment M_V
- ▶ Drehmoment Gleichgewichtsträgheit M_T

untersucht.

Die Gleichgewichtsregelung soll dabei mobilitätseingeschränkte Personen beim Fahrradfahren unterstützen. Daher ist besonders wichtig eine gute Gleichgewichtsregelung im Bereich kleiner Geschwindigkeiten. Nur wenn der Bereich kleiner Geschwindigkeiten wirkungsvoll unterstützt wird, erleichtert die Regelung diesem Personenkreis die Nutzung des Fahrrads. Zum Einen muss beim Anfahren immer der Bereich kleiner Geschwindigkeiten durchfahren werden, zum Anderen neigen Personen mit Einschränkungen der Mobilität zum langsamen Fahren, so dass eine kontinuierliche Unterstützung durch die Gleichgewichtsregelung erforderlich ist.

Für ein komfortables Fahren ist darüber hinaus eine hohe Dämpfung der Eigenbewegungen anzustreben. Das gilt ganz besonders für Eigenbewegungen, die zu Übelkeit führen können. Daher müssen Eigenbewegungen mit Frequenzen von $f \approx 0,1 \dots 0,3 \text{ Hz}$ möglichst vermieden werden oder eine hohe Dämpfung haben [10, 11, 12, 13, 14, 15].

Andere kritische Frequenzen ergeben sich aus Zitterbewegungen der Hände und der Arme des Fahrers (Tremor). Die Regelung soll bei Anregung durch Zitterbewegungen diese Bewegungen nicht noch

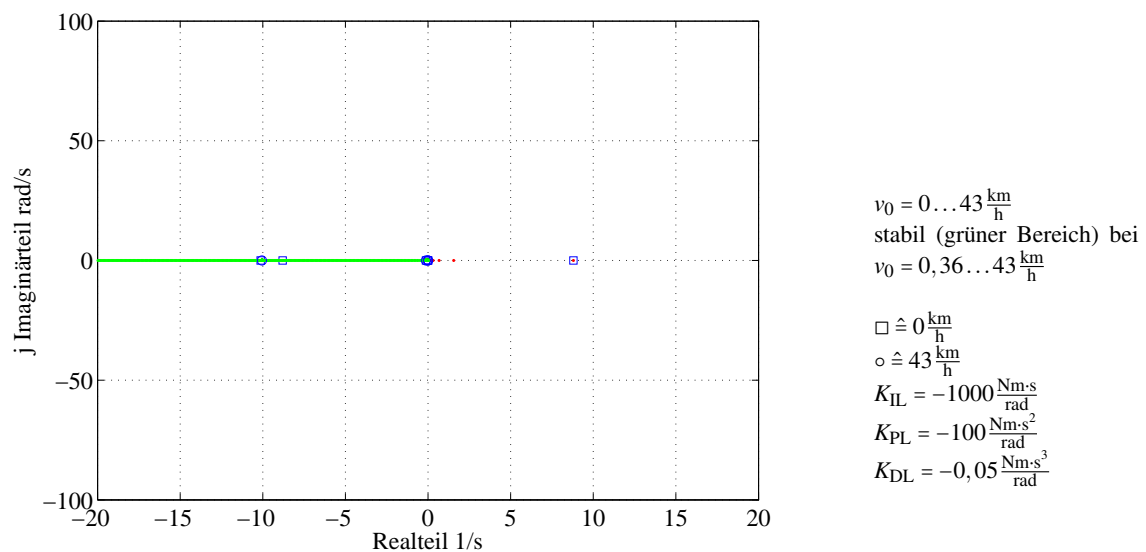


Abbildung 6: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad mit Regelung durch das Lenkerdrehmoment

verstärken. Hier ist besonders auf den niederfrequenten, grobschägigen Tremor und den mittelfrequenten Tremor zu achten. Daher ist im Bereich $f \approx 1 \dots 10$ Hz ebenfalls eine hohe Dämpfung anzustreben.

Die dritte kritische Anregung entsteht aus der Tretbewegung des Fahrers. Durch die Tretbewegung wird das Fahrrad ohnehin in eine seitliche Schwingung versetzt. Die Regelung muss hier stark dämpfen, damit diese seitliche Bewegung nicht verstärkt wird. Beim Radfahren werden bis zu 90 Tretbewegungen je min erreicht. Dies entspricht einer Frequenz von $f = 0 \dots 0,75$ Hz.

In Summe muss also insbesondere im Frequenzbereich $f = 0 \dots 10$ Hz eine hohe Dämpfung des Gesamtsystems vorhanden sein. Dies gilt ganz besonders im Bereich kleiner Fahrgeschwindigkeiten.

Bei der Gleichgewichtsregelung wird immer versucht, die Kontaktlinie von Vorderrad und Hinterrad auf der Fahrbahn unter den Schwerpunkt zu bekommen, so dass kein resultierendes Drehmoment um die Kontaktlinie auftritt, das das Fahrrad zur Seite kippen könnte.

7.1 Gleichgewichtsregelung mit Lenkerdrehmoment

Die Gleichgewichtsregelung über die Lenkbewegung ist die naheliegendste Art der Regelung, da sie auch der normalen Gleichgewichtsregelung durch den Fahrer entspricht. Die Stellgröße ist hier das Lenkerdrehmoment.

Durch das Lenkerdrehmoment wird der Lenker so verstellt, dass dem Kippen des Fahrrads entgegengewirkt wird. Kippt etwa das Fahrrad nach rechts in Fahrtrichtung gesehen, so führt eine Lenkbewegung nach rechts dazu, dass sich die Kontaktlinie des Fahrrads auf der Fahrbahn wieder unter den Schwerpunkt wandert und so das Fahrrad wieder im Gleichgewicht gehalten werden kann.

Das Lenkerdrehmoment wird mit den Verstärkungsfaktoren aus der gemessenen Neigungsgeschwindigkeit

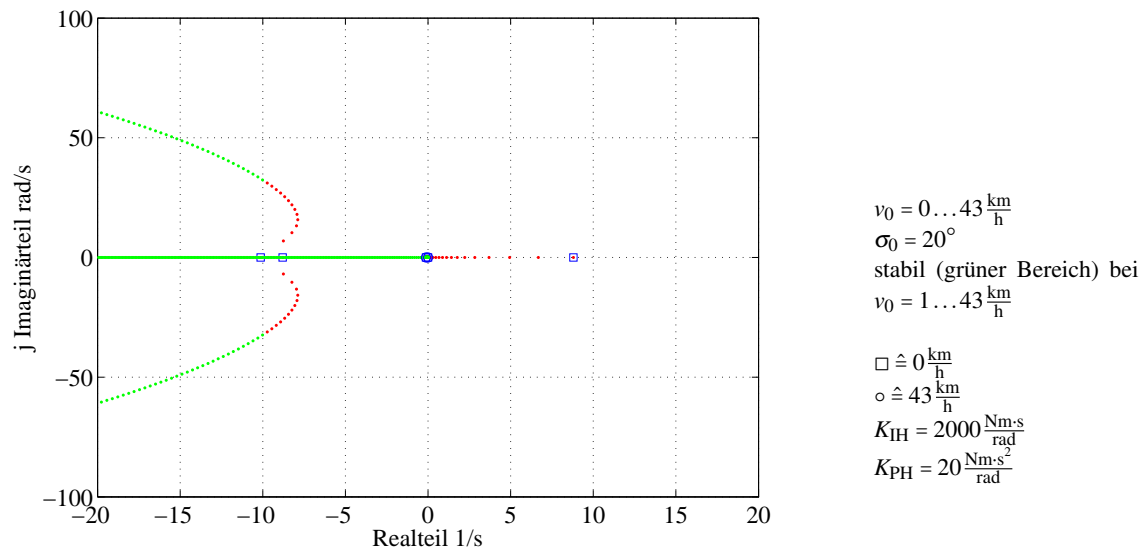


Abbildung 7: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad mit Regelung durch das Hinterraddrehmoment

des Fahrrads und deren Ableitungen gebildet:

$$M_L = K_{IL} \cdot \omega_R + K_{PL} \cdot \alpha_R + K_{DL} \cdot \dot{\alpha}_R \quad (37)$$

Bild 6 zeigt einen stabilen Bereich der Wurzelortskurve von $v_0 = 0,36 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (grüner Bereich der Kurve). D.h. fast ab Stillstand wird durch das Lenkdrehmoment das Fahrrad im Gleichgewicht gehalten.

Die hier gewählten Verstärkungen sind

$$K_{IL} = -1000 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \quad (38)$$

$$K_{PL} = -100 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^2}{\text{rad}} \quad (39)$$

$$K_{DL} = -0,05 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^3}{\text{rad}} \quad (40)$$

Die Eigenwerte sind bei diesen Verstärkungen alle rein reell, d.h. es gibt nur aperiodische Eigenbewegungen.

Somit sind die Forderungen nach einer komfortablen Gleichgewichtsregelung ohne Eigenschwingungen bestmöglich erfüllt. Allerdings ist ein separater Antrieb für das Lenkdrehmoment erforderlich und der Fahrer spürt den Eingriff der Gleichgewichtsregelung an den Händen.

7.2 Gleichgewichtsregelung mit Hinterraddrehmoment

Zur Unterstützung des Fahrers ist ein Antrieb der Räder durch einen Elektromotor vorgesehen. So zeigt Bild 1 ein Fahrrad mit Elektromotor. Es liegt damit nahe, den Antrieb des Hinterrads nicht nur zur Unterstützung des Fahrers bei der Fahrt sondern auch bei der Gleichgewichtsregelung einzusetzen.

Mit dem Antrieb des Hinterrads kann auf das Gleichgewicht nur Einfluss genommen werden, wenn der Lenkwinkel ungleich Null ist $\sigma \neq 0$. Dann kann mit der Stellgröße Hinterraddrehmoment das Fahrrad so beschleunigt werden, dass die Kontaktlinie auf der Fahrbahn unter den Schwerpunkt wandert.

Neigt sich das Fahrrad z.B. nach links und ist der Lenker nach links eingeschlagen, so führt eine zusätzliche Beschleunigung dazu, dass das Fahrrad wieder ins Gleichgewicht kommt. Gleichzeitig wird mit dem Hinterraddrehmoment durch den Nachlauf des Vorderrads ein Lenkdrehmoment erzeugt.

Das Hinterraddrehmoment zur Gleichgewichtsstabilisierung wird mit den Verstärkungsfaktoren aus der gemessenen Seitenneigungsgeschwindigkeit und deren Ableitungen ermittelt:

$$M_H = K_{IH} \cdot \omega_R + K_{PH} \cdot \alpha_R + K_{DH} \cdot \dot{\alpha}_R \quad (41)$$

Bild 7 zeigt die Wurzelortskurve in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für folgende Verstärkungen:

$$K_{IH} = 2000 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \quad (42)$$

$$K_{PH} = 20 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^2}{\text{rad}} \quad (43)$$

Der Lenkwinkel ist in diesem Fall $\sigma_0 = 20^\circ$.

Der stabile Bereich (grüner Bereich in Bild 7) reicht von $v_0 = 1 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Das geregelte Fahrrad hat gegenüber dem ungeregelten Fahrrad einen deutlich erweiterten stabilen Geschwindigkeitsbereich. Für den betrachteten Personenkreis ist besonders die Erweiterung bei kleinen Geschwindigkeiten bis hinunter zu $v_0 = 1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ wichtig.

Im stabilen Bereich treten konjugiert komplexe Eigenwerte $\underline{\lambda}_i = \sigma \pm j \cdot \omega$ auf, so dass das Fahrrad schwingungsfähig ist. Die Dämpfung berechnet sich zu

$$D = \frac{-\sigma}{\omega_0} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} = \frac{\text{Re}(\underline{\lambda}_i)}{\sqrt{\text{Re}(\underline{\lambda}_i)^2 + \text{Im}(\underline{\lambda}_i)^2}} \quad (44)$$

und ist im vorliegenden Fall

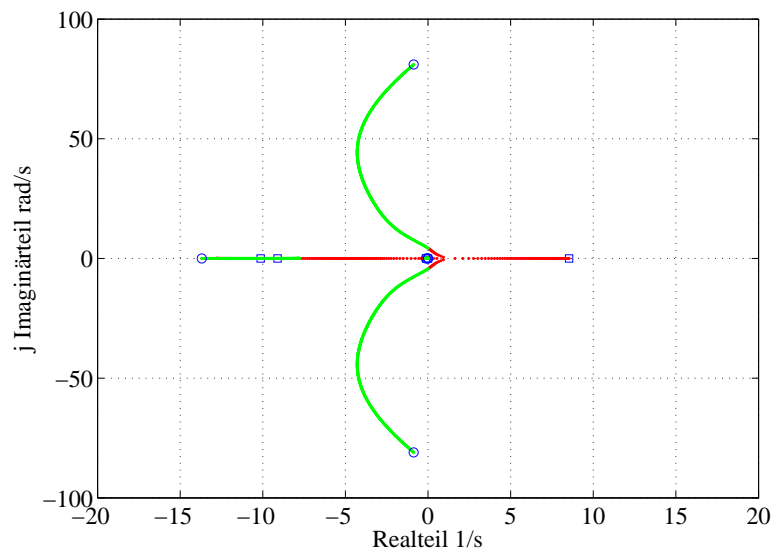
$$D \approx 0,3 \quad (45)$$

Damit weist das Fahrrad mit Gleichgewichtsregelung durch das Hinterraddrehmoment deutliche Eigenschwingungen bei der Gleichgewichtsregelung auf. Die Eigenfrequenzen variieren geschwindigkeitsabhängig:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\text{Re}(\underline{\lambda}_i)^2 + \text{Im}(\underline{\lambda}_i)^2} = 5 \dots 10 \text{ Hz} \quad (46)$$

und liegen damit außerhalb des besonders kritischen Bereichs.

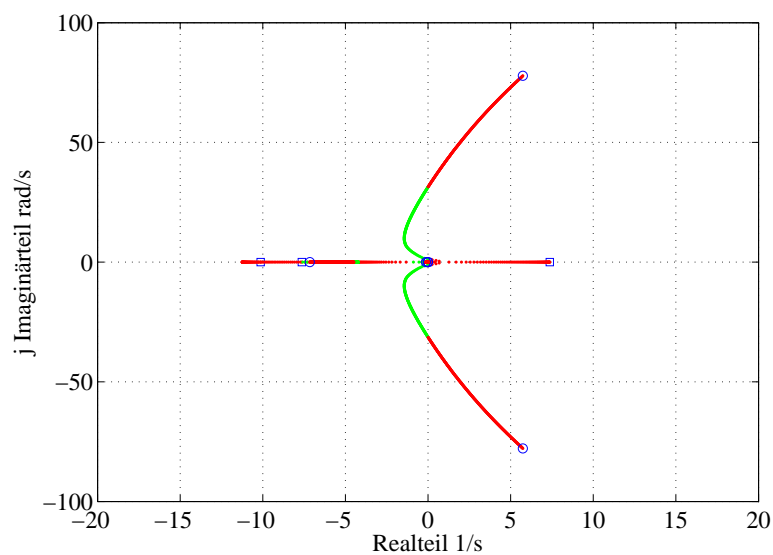
Gegenüber dem ungeregelten Fahrrad ist jedoch eine deutliche Verbesserung der Dämpfung und des Geschwindigkeitsbereichs festzustellen.



$v_0 = 0 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $\sigma_0 = 45^\circ$
 stabil (grüner Bereich) bei
 $v_0 = 6,5 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$\square \triangleq 0 \frac{\text{Nm}}{\text{h}}$
 $\circ \triangleq 43 \frac{\text{Nm}}{\text{h}}$
 $K_{DV} = 0, 1 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^3}{\text{rad}}$

Abbildung 8: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad mit Regelung durch das Vorderraddrehmoment



$v_0 = 0 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $\sigma_0 = 45^\circ$
 stabil (grüner Bereich) bei
 $v_0 = 6,5 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$\square \triangleq 0 \frac{\text{Nm}}{\text{h}}$
 $\circ \triangleq 43 \frac{\text{Nm}}{\text{h}}$
 $K_{PV} = 5,2 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^2}{\text{rad}}$
 $K_{DV} = 0, 1 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^3}{\text{rad}}$

Abbildung 9: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad mit Regelung durch das Vorderraddrehmoment

7.3 Gleichgewichtsregelung mit Vorderraddrehmoment

Zur Unterstützung des Fahrers ist ein Elektroantrieb vorgesehen. Dieser Antrieb kann nicht nur wie in Bild 1 zu sehen das Hinterrad antreiben, alternativ ist auch der Einbau eines Antriebs in das Vorderrad möglich.

Der Vorderradantrieb kann prinzipiell auch zur Gleichgewichtsregelung eingesetzt werden. Allerdings kann nur bei einem Lenkwinkel ungleich Null $\sigma \neq 0$ ein Einfluss auf die Neigung des Fahrrads genommen werden.

Ein Drehmoment am Vorderrad kann dann so wirken, dass die Kontaktlinie auf der Fahrbahn wieder unter den Schwerpunkt geschoben wird.

Neigt sich das Fahrrad z.B. nach rechts und ist der Lenker nach rechts eingeschlagen, so führt eine zusätzliche Beschleunigung dazu, dass das Fahrrad wieder ins Gleichgewicht kommt. Gleichzeitig wird mit dem Vorderraddrehmoment direkt ein Drehmoment auf das Fahrrad erzeugt, das das Fahrrad in die Gleichgewichtslage aufrichten kann.

Das Vorderraddrehmoment

$$M_V = K_{IV} \cdot \omega_R + K_{PV} \cdot \alpha_R + K_{DV} \cdot \dot{\alpha}_R \quad (47)$$

zur Gleichgewichtsstabilisierung wird mit den Verstärkungsfaktoren aus der gemessenen Seitenneigung gebildet.

Bild 8 zeigt den Verlauf der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für folgende Verstärkungen:

$$K_{DV} = 0,1 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^3}{\text{rad}} \quad (48)$$

Der Lenkwinkel ist in diesem Fall mit $\sigma_0 = 45^\circ$ sehr groß.

Der stabile Bereich (grüner Bereich in Bild 7) reicht von $v_0 = 6,5 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, d.h. mit dieser Reglereinstellung wird nur der Bereich großer Geschwindigkeiten erweitert.

Für das Gleichgewicht bei kleinen Geschwindigkeiten bringt diese Einstellung keine Vorteile.

Die Wurzelortskurve für die Verstärkungen

$$K_{PV} = 5,2 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^2}{\text{rad}} \quad (49)$$

$$K_{DV} = 0,1 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}^3}{\text{rad}} \quad (50)$$

zeigt Bild 9. Mit dieser Reglereinstellung wird der stabile Bereich zu kleinen Geschwindigkeiten ab $v_0 = 5,5 \dots 19 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ erweitert.

Allerdings ist die Mindestgeschwindigkeit immer noch relativ hoch und die Dämpfung der Eigenwerte ist gering.

Insgesamt ist die Gleichgewichtsregelung über das Vorderraddrehmoment nicht erfolgversprechend.

Gegenüber dem unregulierten Fahrrad ist nur eine kleine Verbesserung des Geschwindigkeitsbereichs festzustellen. Die Dämpfung der Eigenwerte ist gering.

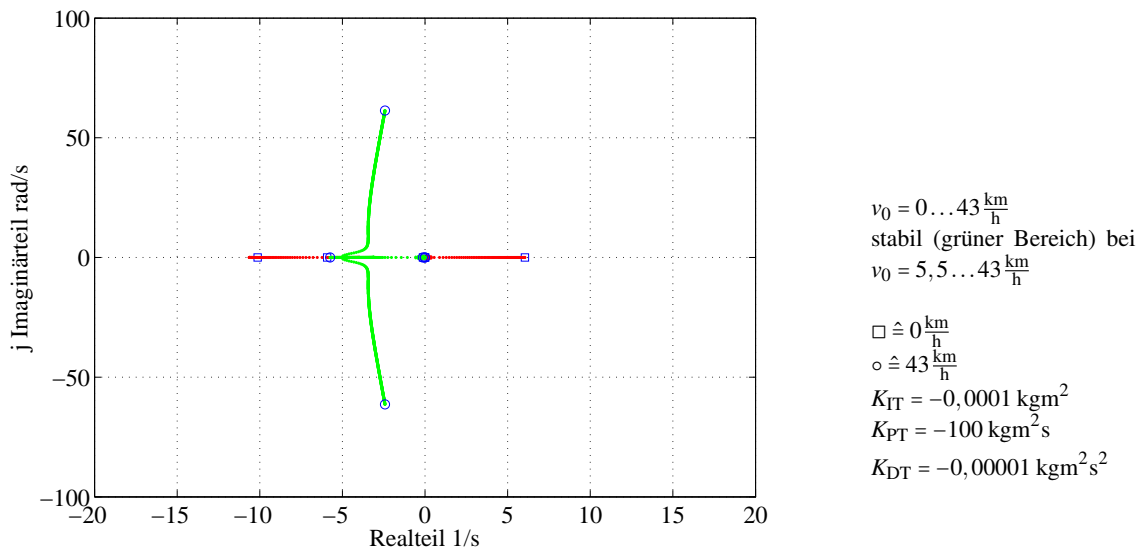


Abbildung 10: Wurzelortskurve/ Eigenwerte Fahrrad mit Regelung durch das Drehmoment der Gleichgewichtsträgheit

7.4 Gleichgewichtsregelung mit Drehmoment Gleichgewichtsträgheit

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie durch eine Zusatzmassenträgheit das Gleichgewichtsverhalten des Fahrrads stabilisiert werden kann.

Dazu wird eine Massenträgheit mit der Drehachse in Fahrtrichtung des Fahrrads montiert. Der Antrieb der Massenträgheit erfolgt mit einem Elektromotor.

Wird die Massenträgheit durch den Motor beschleunigt oder verzögert führt dies zu einem Reaktionsmoment auf das Fahrrad. Dieses Reaktionsmoment kann einer Seitenbewegung des Fahrrads entgegenwirken.

Der Drehimpuls der Massenträgheit würde sich in Kuvenfahren negativ bemerkbar machen, so dass die mittlere Drehzahl der Massenträgheit Null sein muss. Dies wird dadurch erreicht, dass dem Antrieb und der Massenträgheit Hochpassverhalten verliehen wird. D.h. bei konstantem Eingangssignal geht die Drehzahl der Massenträgheit wieder auf Null zurück.

Dieses Verhalten wird durch folgende Differenzialgleichung für die Winkelbeschleunigung und Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsmasse ausgedrückt:

$$\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_o \cdot f_u} \cdot \ddot{\alpha}_T - K_{DT} \cdot \dot{\alpha}_R = - \left(\frac{1}{2 \cdot \pi f_o} + \frac{1}{2 \cdot \pi f_u} \right) \cdot J_T \cdot \alpha_T - J_T \cdot \omega_T + K_{IT} \cdot \omega_R + K_{PT} \cdot \alpha_R \quad (51)$$

$$\dot{\omega}_T = \alpha_T \quad (52)$$

Bild 10 zeigt das Gleichgewichtsverhalten für die Verstärkungen

$$K_{IT} = -0,0001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (53)$$

$$K_{PT} = -100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s} \quad (54)$$

$$K_{DT} = -0,00001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2 \quad (55)$$

Der stabile Bereich (grüner Bereich in Bild 10 reicht nun von $v_0 = 5,5 \dots 43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Im stabilen Bereich treten bei höheren Geschwindigkeiten konjugiert komplexe Eigenwerte $\underline{\lambda}_i$ auf. Deren Dämpfung nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit ab.

Die Mindestgeschwindigkeit ist immer noch relativ hoch und die Dämpfung der Eigenwerte ist über weite Geschwindigkeitsbereiche gering.

Insgesamt ist die Gleichgewichtsregelung über die Massenträgheit nicht erfolgversprechend. Eine Ursache ist das erforderliche Hochpassverhalten, dass eine Stabilisierung erschwert.

Gegenüber dem ungeregelten Fahrrad ist nur eine kleine Verbesserung des Geschwindigkeitsbereichs festzustellen. Die Dämpfung der Eigenwerte ist gering.

8 Zusammenfassung

Anhand der Eigenwerte wurde das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtsregelung von Fahrrädern untersucht. Dabei wurde besonders auf die Anforderungen zur Unterstützung mobilitätseingeschränkter geachtet.

Für die Modellierung wurde das System gegenüber der Realität vereinfacht: So wird das Fahrrad insgesamt als starr angenommen. Die Massen von Fahrer und Fahrrad werden in einer Punktmasse konzentriert angenommen.

Die Simulationen zeigen, dass die wirkungsvollste Gleichgewichtsregelung mit einem Drehmoment am Lenker erreicht wird. Mit dem Lenkdrehmoment lässt sich das Gleichgewicht so stabilisieren, dass über einen weiten Geschwindigkeitsbereich nur reelle Eigenwerte mit aperiodischem Verhalten auftreten. Der stabile Bereich lässt sich bis zu sehr kleinen Geschwindigkeiten ausweiten.

Eine weitere attraktive Regelung erfolgt mit dem Antriebsdrehmoment des Hinterrads. Der Hinterradantrieb ist ohnehin zur Unterstützung des betrachteten Personenkreises erforderlich, so dass die Gleichgewichtsregelung besonders kostengünstig realisiert werden kann. Es zeigen sich deutliche Verbesserungen gegenüber dem ungeregelten Fahrrad, jedoch sind die Ergebnisse deutlich schlechter als bei der Regelung mit dem Lenkdrehmoment.

Die beiden anderen untersuchten Verfahren der Gleichgewichtsregelung über das Vorderraddrehmoment oder über eine zusätzliche Massenträgheit zeigten keine überzeugenden Ergebnisse.

Auf Basis dieser Ergebnisse soll das Modell verfeinert und die Regelung optimiert werden. So ist geplant, das Modell des Fahrrads und des Fahrers um Elastizitäten zu erweitern und die Massen auf mehrere Schwerpunkte zu verteilen. Die Nichtlinearitäten sollen beachtet werden. Die Regelung soll als Zustandsregelung aufgebaut werden, wobei das nichtlineare Verhalten berücksichtigt wird.

Tabelle 1: Formelzeichen und Beispielwerte

Zeichen	Bedeutung	Beispielwert
L	Radstand	1,1 m
l	Nachlauf	0,1 m
h	Höhe des Schwerpunkts über der Fahrbahn	0,95 m
b	Abstand des Schwerpunkts zum Hinterrad	0,25 m
r	Radius Vorder- und Hinterrad	0,35 m
m	Gesamtmasse	90 kg
J_r	Massenträgheit Vorder- und Hinterrad	0,095 kg m ²
J_φ	Massenträgheit des restlichen Teils des Fahrrads und des Fahrers um die Kontaktlinie der Reifen auf der Fahrbahn	10 kg m ²
J_L	Massenträgheit von Lenker und Vorderrad um die Lenkachse	0,079 kg m ²
$J_{\varphi L}$	Massenträgheit des Lenkers und des Vorderrads um die Kontaktlinie der Reifen auf der Fahrbahn	0,84 kg m ²
J_T	Massenträgheit der Gleichgewichtsträgheit	0,1 kg m ²
g	Erdbeschleunigung	9,81 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
d_{ae}	Reibkoeffizient Lenkung	0,8 $\frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$
v	Geschwindigkeit des Fahrrads	
σ	Lenkwinkel	
ω_σ	Lenkwinkelgeschwindigkeit	
φ	Neigungswinkel	
ω_φ	Neigungswinkelgeschwindigkeit	
ω_T	Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsträgheit	
α_T	Winkelbeschleunigung der Gleichgewichtsträgheit	
φ_R	Messwert Neigungswinkel	
ω_R	Messwert Neigungswinkelgeschwindigkeit	
α_R	Messwert Neigungswinkelbeschleunigung	
f_o	obere Grenzfrequenz Gleichgewichtsträgheit	200 Hz
f_u	untere Grenzfrequenz Gleichgewichtsmasse	0,02 Hz
T_R	Zeitkonstante der Messung der Seitenneigung	2 ms
K_{IT}	Integralverstärkung Drehmoment Gleichgewichtsmasse	
K_{PT}	Proportionalverstärkung Drehmoment Gleichgewichtsmasse	
K_{DT}	Differentialverstärkung Drehmoment Gleichgewichtsmasse	
K_{IH}	Integralverstärkung Hinterraddrehmoment	
K_{PH}	Proportionalverstärkung Hinterraddrehmoment	
K_{DH}	Differentialverstärkung Hinterraddrehmoment	
K_{IV}	Proportionalverstärkung Vorderraddrehmoment	
K_{PV}	Proportionalverstärkung Vorderraddrehmoment	
K_{DV}	Differentialverstärkung Vorderraddrehmoment	
K_{IL}	Integralverstärkung Lenkdrehmoment	
K_{PL}	Proportionalverstärkung Lenkdrehmoment	
K_{DL}	DifferenzialVerstärkung Lenkdrehmoment	
M_H	Hinterraddrehmoment	
M_V	Vorderraddrehmoment	
M_L	Lenkdrehmoment	
M_T	Drehmoment Gleichgewichtsträgheit	
M_φ	externes Drehmoment um Kontaktlinie der Räder auf der Fahrbahn	
v_0	Arbeitspunkt Fahrgeschwindigkeit	0...12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ = 0...43 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
σ_0	Arbeitspunkt Lenkwinkel	0 / 10 / 20 / 45 °
M_{V0}	Arbeitspunkt Vorderraddrehmoment	$M_{V0} = 0$
$\underline{\lambda}_i$	komplexer Eigenwert	

Literatur

- [1] **Zhang, Yi:** Dynamic Modeling and Balance Control of Human/Bicycle System. 2010 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Montreal, Canada, July 6-9 (2010)
- [2] **Fajans:** Steering in bicycles and motorcycles. Am. J. Phys. 68 (7) (2000)
- [3] **Getz, Marsden:** Control for an Autonomous Bicycle. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 21-27 May 1995, Nagoya (1995)
- [4] **Keo, Masaki:** Trajectory Control for an Autonomous Bicycle with Balancer. Proceedings of the 2008 IEEE /ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. July 2-5, 2008, Xi'an, China (2008)
- [5] **Yi, Zhang, Song:** Autonomous Motorcycles for Agile Maneuvers, Part I: Dynamic Modeling. IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai (2009)
- [6] **Yi, Song, Levandowski, Jayasuriya:** Trajectory Tracking and Balance Stabilization Control of Autonomous Motorcycles. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. Orlando, Florida (2006)
- [7] **Schlichting:** Zur Gleichgewichtsproblematik beim Fahrradfahren. techni-didact 9/4, 257 (1984)
- [8] **Jones:** The stability of the bicycle. Physics Today (1970)
- [9] **Meijaard, Papadopoulos, Rluina, Schwab:** Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. Proc. R. Soc. (2007)
- [10] **Benson:** Motion sickness (http://www.bordeninstitute.army.mil/published_volumes/harshEnv2/HE2ch35.pdf) . K.B.
- [11] **Pandoff (Ed.):** Medical Aspects of Harsh Environments, Bd. 2. United States Government Printing. ISBN 0-16-051184-4 (2002)
- [12] **Keshavarz, Hecht:** Validating an Efficient Method to Quantify Motion Sickness. Human Factors 53, 415426 (2011)
- [13] Wikipedia: Reisekrankheit - Übersichtsbeitrag (2012)
- [14] **Scherer (Hg.):** Gleichgewichtssinn: Neues aus Forschung und Klinik. Wien, New York: Springer. ISBN 978-3-211-75431-3 (2007)
- [15] **Schmäl, Stoll:** Kinetosen. HNO 48, 346356. (2000)